CONCEPTOS BASICOS DE CONFIABILIDAD

Ingº Angel F. Arvelo

Glosario y Nomenclatura:

T = Variable aleatoria que representa la vida de una componente o sistema.
f(t) = Función de densidad de la variable T.

$F(t) = P(X \leq t) = \int_0^t f(t)dt$ = Función de distribución de T.

$R(t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(t)dt = P(X > t)$ = Función de Confiabilidad

$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt$ = MTBF = Mean Time between Failures ó Tiempo Medio entre fallas.

Probabilidad de Falla en un intervalo (t, t +Δt] al alcanzarlo = Probabilidad de que cumplida la edad "t" falle en el lapso $\Delta t = P(T \leq t + \Delta t \mid T > t) = \dfrac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)}$

Tasa de fallas en el intervalo = $\dfrac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t \; R(t)}$

Tasa instantánea de fallas = $\lambda(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t \; R(t)} = \dfrac{f(t)}{R(t)}$

Relaciones matemáticas : Entre la función de densidad , de distribución , de confiabilidad y tasa instantánea de fallas, existen relaciones que permiten a partir de una de ellas, obtener unívocamente las restantes.
A partir de la tasa instantánea de fallas, es posible obtener la función de confiabilidad y la función de densidad a partir de las expresiones siguientes, cuya demostración queda para el estudiante:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} \quad ; \quad f(t) = \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

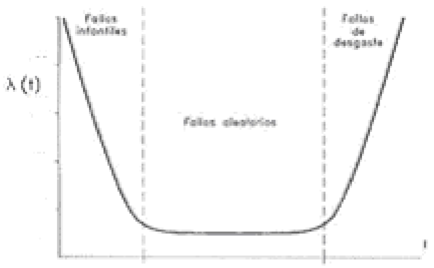
En todas las expresiones anteriores se supone F(0) = 0 , es decir que la componente o sistema esta operativa en el instante inicial.
En caso de que exista una probabilidad inicial de falla, las expresiones cambian.

Principales modelos para la tasa instantánea de fallas: Es común hacer algún supuesto sobre el comportamiento de la tasa instantánea de fallas, también conocida como función de riesgo, para obtener así la función de densidad de la vida del sistema, y a partir de ella establecer plazos de garantía.
Los supuestos más frecuentes son:

- Tasa instantánea constante "λ" . Este supuesto conduce a que la vida del equipo sigue una distribución del tipo exponencial con : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, t > 0.
- Tasa instantánea creciente ($\beta > 1$) o decreciente ($0 < \beta < 1$) :

$\lambda(t) = \alpha\beta\, t^{\beta-1}$, donde "α" y "β" son parámetros positivos.
Este supuesto conduce a que la vida de la componente sigue una distribución del tipo Weibull con función de densidad : $f(t) = \alpha\beta\, t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}$; t>0, α>0 , β>0.

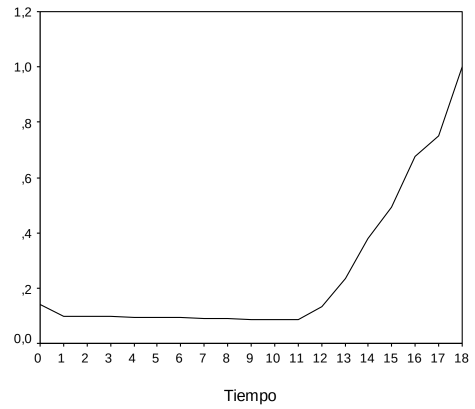
- Curva de la bañera: Este es el supuesto mas realista para el comportamiento de la tasa instantánea de fallas, y considera tres zonas, una primera decreciente conocida como de desgaste prematuro o de mortalidad infantil, otra segunda conocida como de fallas aleatorias o vida útil con tasa constante de fallas, y una última con tasa creciente denominada zona de desgaste.



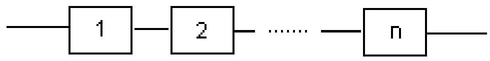
La función de densidad correspondiente la vida del equipo presenta tres tramos, y la estimación de sus parámetros se hace mediante el uso de un papel especial conocido como "Papel de Weibull".
El siguiente ejemplo numérico muestra como puede ser construida aproximadamente la curva de la bañera a partir de unos datos experimentales, suponiendo que inicialmente se instalaron 1000 componentes, y se les hizo un seguimiento hasta que fallaron todas:

Tiempo "t "en intervalos de 100 horas	Fallas en el intervalo	Fallas acumuladas hasta "t"	Función densidad de fallas $f(t)$	Función acumulada de fallas $F(t)$	Confiabilidad $R(t)$	Tasa de fallas $\lambda(t)$
0	140	0	0,1400	0,0000	1,0000	0,1400
1	85	140	0,0850	0,1400	0,8600	0,0988
2	75	225	0,0750	0,2250	0,7750	0,0968
3	68	300	0,0680	0,3000	0,7000	0,0971
4	60	368	0,0600	0,3680	0,6320	0,0949
5	53	428	0,0530	0,4280	0,5720	0,0927
6	48	481	0,0480	0,4810	0,5190	0,0925
7	43	529	0,0430	0,5290	0,4710	0,0913
8	38	572	0,0380	0,5720	0,4280	0,0888
9	34	610	0,0340	0,6100	0,3900	0,0872
10	31	644	0,0310	0,6440	0,3560	0,0871
11	28	675	0,0280	0,6750	0,3250	0,0862
12	40	703	0,0400	0,7030	0,2970	0,1347
13	60	743	0,0600	0,7430	0,2570	0,2335
14	75	803	0,0750	0,8030	0,1970	0,3807
15	60	878	0,0600	0,8780	0,1220	0,4918
16	42	938	0,0420	0,9380	0,0620	0,6774
17	15	980	0,0150	0,9800	0,0200	0,7500
18	5	995	0,0050	0,9950	0,0050	1,0000
19		1000		1,0000	0,0000	

La curva de la bañera se obtiene al graficar los valores de $\lambda(t)$ vs. t tal como se indica en la siguiente figura:

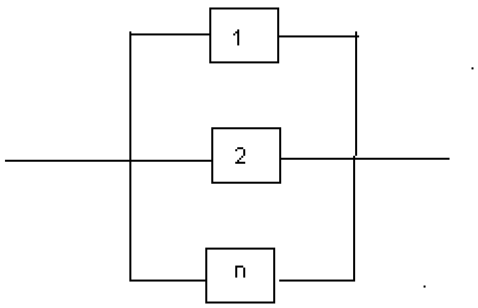


Confiabilidad de sistemas: Normalmente un sistema posee varias componentes cuya falla puede o no ocasionar la falla del sistema.
Existen diversas formas de operación para las componentes de un sistema, siendo las más comunes:
a) En serie: El sistema funciona cuando funcionan todas las componentes, y la falla de cualquiera de ellas ocasiona la falla del sistema.



En este caso la duración del sistema viene determinada por la componente que dure menos es decir por la primera en fallar, y si se puede suponer que el funcionamiento de cada componente es independiente de las demás, la confiabilidad del sistema es el producto de las confiabilidades entre sus componentes: $R(t) = R_1(t)\ R_2(t) \cdots R_n(t)$

b) En paralelo: El sistema funcione mientras funcione por lo menos una de las componentes, de manera que la falla del sistema ocurre cuando fallan todas.



En este caso la duración del sistema viene determinada por la componente que dure más es decir por la última en fallar, y si se puede suponer que el funcionamiento de cada componente es independiente de las demás, la confiabilidad del sistema viene dado por:

$$R(t) = 1 - (1- R_1(t))\ (1- R_2(t)) \cdots (1-R_n(t))$$

c) En redundancia : Se dice que un sistema es redundante cuanto posee mas componentes que las que realmente necesita para su correcto funcionamiento, es decir necesita « m » , pero se tienen « n » ($m \leq n$).
El caso m = n , corresponde a un sistema en serie, y el caso m =1 a uno en paralelo.
Existen a su vez dos casos de redundancia, activa cuando todas las componentes están en operación a pesar de que no se les necesita a todas; y

pasiva o en relevo, en donde las componentes que no se necesitan permanecen en reserva esperando que falle la activa (repuestos).
En el caso de redundancia activa la falla del sistema ocurre cuando se produce la falla (n - m +1) , y si puede suponerse que las « n » componentes tienen idéntica confiabilidad R(t) y que funcionan de manera independiente, la confiabilidad del sistema $R_s(t)$ puede ser hallada calculando la probabilidad de que se produzcan (n-m) fallas como máximo, a través de la expresión:
$R_s(t) = \sum_{i=0}^{i=n-m} \binom{n}{i} (R(t))^{n-i} (1-R(t))^i$
Para componentes en redundancia pasiva con m =1, la distribución de su vida total se halla a través de la distribución de su suma: $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.
La aplicación del "Teorema Central del límite" suele ser una herramienta útil para encontrar la distribución de "T".
Una explicación más detallada sobre los conceptos aquí resumidos, puede ser encontrada en los siguientes textos:

- Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.
  Paul Meyer. Editorial Alfa Omega
- Probabilidad y Estadística para Ingenieros de Miller y Freund.
  Richard A. Johnson. Prentice Hall

EJERCICIOS

1°) Un vuelo de una línea aérea puede ser considerado como un sistema con tres componentes principales: A (avión) , B (piloto) y C (aeropuerto).
La componente "B" puede considerarse también como un su subsistema en paralelo que consiste en B_1 (capitán) B_2 (primer oficial) y B_3 (ingeniero de vuelo) ; mientras que "C" como otro subsistema en paralelo formado por C_1 (aeropuerto de destino) y C_2 (aeropuerto alternativo).
Suponga que para un determinado vuelo las confiabilidades de las componentes A, B_1 , B_2 , B_3 , C_1 y C_2 son respectivamente: 0,999, 0,9995 , 0,999 , 0,20 , 0,95 y 0,85. ¿Cuál es la confiabilidad del vuelo?.

2°) Un chip de cierto circuito integrado tiene una tasa de fallas constante de 0,02 por mil horas.

a) ¿Cuál es su confiabilidad para 20.000 horas de uso?.
b) Si un equipo utiliza cuatro de tales chips conectados en serie, ¿cuál es su confiabilidad para 5.000 horas de uso?.

Solución : a) 0,6703 b) 0,6703

3°) La función de densidad para la vida de una componente obedece a una distribución del tipo Weibull : $f(t) = \alpha\beta\, t^{\beta-1}\, e^{-\alpha t^{\beta}}$; t >0 , con parámetros α= 0,005 β= 0,80 .
Un aparato utiliza dos de tales componentes en paralelo. ¿Cuál es su confiabilidad para 5000 horas?.

4°) Suponga que la tasa de fallas para una componente se puede considerar constante hasta alcanzar una edad t_o, y que de allí en adelante es creciente según una función lineal, es decir:

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda \ ; \text{si } 0<t\le t_0\\ \lambda+m\,(t-t_0)\ ; \text{si } t>t_0 \ \ (m>0)\end{cases}$$

Obtenga la función de densidad de T , y su función de confiabilidad.

Solución: $R(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t} \ ; \text{si } 0<t\le t_0\\ e^{t(mt_0-\lambda)-\frac{m}{2}(t^2+t_0^2)} \ ; \text{si } t>t_0\end{cases}$

5°) La duración de una componente sigue una Distribución Normal con media 50 horas y desviación estándar 5 horas.
Si "n" componentes se instalan en paralelo, determine el valor de "n" para que la confiabilidad del sistema durante las primeras 55 horas de uso, sea de 0,99 por lo menos.
Solución: n = 27

6°) Dos componentes que operan de manera independiente, y que presentan tasa de falla constante λ_1 y λ_2 , son conectadas en paralelo.
Halle la función de confiabilidad para el sistema, y el tiempo medio entre fallas.
Solución : $R(t)=1-(1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t})$

7°) La duración de unas pilas sigue una Distribución Normal con media 20 horas. Se sabe que el 80% de estas pilas sobrepasan las 15 horas de funcionamiento. Un radio lleva 4 pilas conectadas en serie, es decir, que si falla alguna, entonces falla el radio.

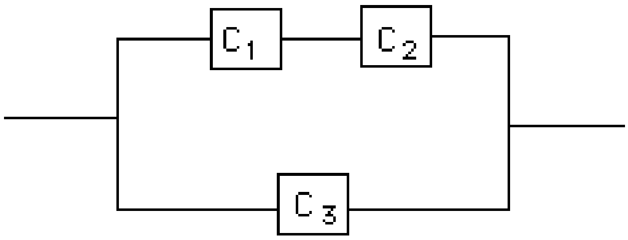
a) ¿Cual es la probabilidad de que el radio falle antes de las 18 horas de uso? .
b) ¿ Por cuanto tiempo podría garantizarse la operación del radio, para tener probabilidad 0,95 , de cumplir con lo garantizado ? .

Solución : a) 0,8393 b) 6,70 horas aproximadamente

8°) La vida de una componente sigue una distribución exponencial con media 10 horas. Se dispone de 30 componentes que serán usadas una tan pronto falle la anterior.
a) Calcule la confiabilidad para un servicio de 335 horas.
b) ¿Cuántas componentes se necesitan para que la confiabilidad sea de 0,99 por lo menos? .
Solución : a) 0,25

9°) La vida de unas componentes es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 12 horas.
Un aparato utiliza tres componentes simultáneamente, y no funciona en caso de que falle alguna de las tres.
Se tienen nueve componentes, que van a ser utilizadas de la siguiente forma: Se instalan las primeras tres; al producirse la primera interrupción en el funcionamiento del aparato, se cambian las tres piezas usadas, y se instalan tres nuevas, y así sucesivamente hasta agotarse.
¿Cuál es la confiabilidad del aparato para un servicio de 15 horas? .
Solución: 0,2771

10°) Suponga que un sistema usa tres componentes C_1,C_2 y C_3, conectadas de la forma como se indica en la figura:



La vida de cada una de ellas es independiente de las demás, y siguen cada una, una Distribución Exponencial, con medias 15 , 20 y 6 horas respectivamente.
Se tiene una sola componente nueva de C_1 , otra componente nueva de C_2 , y dos componentes nuevas de C_3 ; de forma que se puede guardar una de repuesto, para ser usada tan pronto falle la primera.
¿Cual es la confiabilidad de este sistema, para 10 horas de servicio ? .
Solución: 0,6582

11°) La vida de una componente sigue una Distribución Gamma con media 20 horas, y desviación típica de 10 horas.
a) ¿Cual es la confiabilidad de una componente que ya tiene 15 horas de uso, para las próximas tres horas de servicio ? .
b) ¿ Por cuanto tiempo podría garantizarse la vida de una componente nueva, de forma que solo tenga un 5% de probabilidad de falla, durante ese lapso de garantía?.
c) Para cubrir un servicio de 150 horas, ¿cuantas componentes como mínimo se necesitan, para que la confiabilidad sea de 0.95 por lo menos?.
Las componentes son usadas una tan pronto falla la anterior.

12°) El consumo diario de agua en un proceso de producción sigue una Distribución Exponencial , y se sabe que la probabilidad de que en un día el consumo sea mayor que 100 metros cúbicos es de 0,75.
Se quiere construir un tanque de almacenamiento que garantice el suministro de agua al proceso durante una semana (7 días), en caso de que falle el abastecimiento externo.
Si se diseña el tanque con una capacidad de 2500 metros cúbicos. ¿Cuál es su confiabilidad?.
Solución : 0,5705